

Section 1.2

$$15. \quad (1+t^2) \frac{dy}{dt} + ty = (1+t^2)^{\frac{5}{2}}$$

$$\frac{dy}{dt} + \underbrace{\frac{t}{1+t^2}}_{a(t)} y = \underbrace{(1+t^2)^{\frac{5}{2}}}_{b(t)}$$

Compute integrating factor

$$\mu(t) = e^{\int a(t) dt} = e^{\int \frac{t}{1+t^2} dt}$$

$$= e^{\frac{1}{2} \int \frac{2t}{1+t^2} dt}$$

$$= e^{\frac{1}{2} \ln(1+t^2)} = e^{\ln(1+t^2)^{\frac{1}{2}}} = (1+t^2)^{\frac{1}{2}}$$

Multiply the equation by $\mu(t)$ on both sides:

$$(1+t^2)^{\frac{1}{2}} \frac{dy}{dt} + \frac{t}{(1+t^2)^{\frac{1}{2}}} y = (1+t^2)^2$$

$$\frac{d}{dt} \left[(1+t^2)^{\frac{1}{2}} y \right] = (1+t^2)^2$$

$$(1+t^2)^{\frac{1}{2}} y = \int (1+t^2)^2 dt$$

$$= \int 1 + 2t^2 + t^4 dt$$

$$= t + \frac{2}{3} t^3 + \frac{t^5}{5} + C$$

$$\Rightarrow y = \frac{t}{(1+t^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{2t^3}{3(1+t^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{t^5}{5(1+t^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{C}{(1+t^2)^{\frac{1}{2}}}$$

□